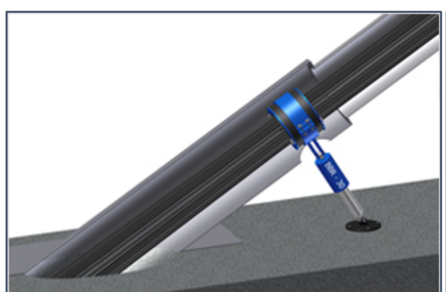
谐波平衡法及其在斜拉索减振和水下缆绳分析中的应用

陈 林

2018年4月24日

内容

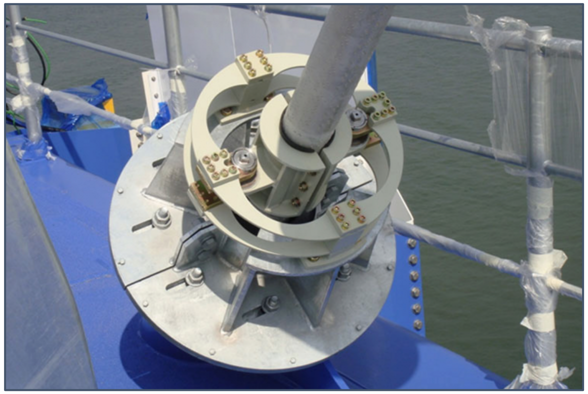
- ❑ 斜拉索减振和系缆分析中的非线性问题
- ❑ 谐波平衡法求解非线性系统的周期性响应
- ❑ 斜拉索-非线性减振系统的参数优化
- ❑ 水下缆绳的周期性响应分析
- ❑ 小结与展望



斜拉索减振中的非线性问题

- ❑ 非线性阻尼器
  - ❑ 工程应用
    - ❑ 摩擦型阻尼器
    - ❑ 主动 / 半主动控制：磁流变（MR）阻尼器
  - ❑ 研究需求
    - ❑ 具有提供比线性阻尼器更优减振效果的潜力
    - ❑ 经济性、耐久性(例如摩擦型)
    - ❑ 线性阻尼器为理想模型

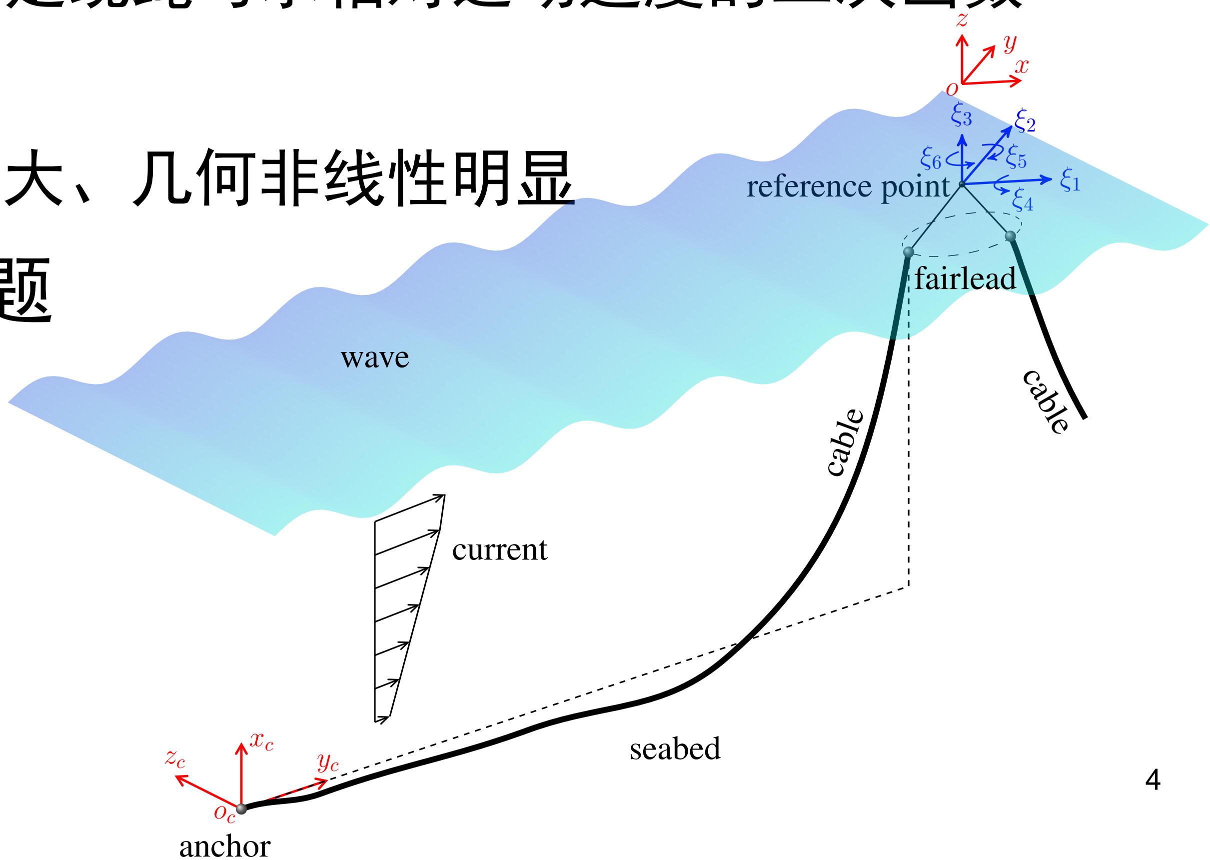
韩国Incheon桥摩擦阻尼器



苏通大桥上安装的MR阻尼器

水下缆索的非线性力学行为

- 工程背景
  - 漂浮隧道、海上风机、海上波浪能转化器
- 非线性水动力学作用
  - 水对缆索的拖拽力是缆绳与水相对运动速度的二次函数
- 几何非线性
  - 缆绳的垂度可能很大、几何非线性明显
- 系缆-海底接触问题



谐波平衡(Harmonic Balance)方法

❑ 基本概念

动力微分方程

$$\underbrace{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\mathbf{q}}_{\text{线性项}}+\underbrace{\mathbf{f}_{nl}(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q})}_{\text{非线性项}}=\underbrace{\mathbf{f}_{ext}(\omega,t)}_{\text{周期激励}}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\mathbf{q}}_{\text{线性项}}=\underbrace{\mathbf{f}(\omega,t;\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q})}_{\text{非线性周期力}}$$

快速Fourier变换 ↓ ↓ 1

$$\underbrace{\mathbf{A}(\omega)\mathbf{z}}_{\text{线性部分频域表达}}=\underbrace{\mathbf{b}(\mathbf{z})}_{\text{力Fourier系数}}$$

$$\mathbf{h}(\omega,\mathbf{z})\overset{\text{def}}{=}\mathbf{A}(\omega)\mathbf{z}-\mathbf{b}(\mathbf{z}) \quad ②$$

代数迭代方程

t,ω: 时间，激励频率

$\mathbf{M},\mathbf{C},\mathbf{K}$: 质量、阻尼和刚度矩阵

$\ddot{\mathbf{q}},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q}$: 加速度、速度和位移

$\mathbf{f}_{nl}(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q})$: 非线性项

$\mathbf{f}_{ext}(\omega,t)$: 周期性激励

$\mathbf{f}(\omega,t;\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q})$: $\mathbf{f}_{ext}(\omega,t)-\mathbf{f}_{nl}(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q})$

$\mathbf{A}(\omega)$: 与 $\mathbf{M},\mathbf{C},\mathbf{K}$ 和 ω 相关矩阵

$\mathbf{z},\mathbf{b}$: 响应和外力的Fourier系数

$\mathbf{h}(\omega,\mathbf{z})$: 代数方程残差函数

① 时频域结合的技术： $\mathbf{z}\xrightarrow{\text{逆Fourier变换}}\mathbf{q}(t)\xrightarrow{\text{时域计算}}\mathbf{f}(\omega,t;\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q})\xrightarrow{\text{Fourier变换}}\mathbf{b}(\mathbf{z})$

② 采用Newton－Raphson进行求解时，**残差函数导数的解析表达式**对计算效率至关重要

谐波平衡(Harmonic Balance)方法

❑ 基本概念

动力微分方程

$$\overbrace{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\mathbf{q}}^{\text{线性项}}+\overbrace{\mathbf{f}_{nl}(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q})}^{\text{非线性项}}=\overbrace{\mathbf{f}_{ext}(\omega,t)}^{\text{周期激励}}$$

$$\downarrow$$

$$\overbrace{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\mathbf{q}}^{\text{线性项}}=\overbrace{\mathbf{f}(\omega,t;\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q})}^{\text{非线性周期力}}$$

快速Fourier变换 $\downarrow$ $\downarrow$ 1

$$\overbrace{\mathbf{A}(\omega)\mathbf{z}}^{\text{线性部分频域表达}}=\overbrace{\mathbf{b}(\mathbf{z})}^{\text{力Fourier系数}}$$

$$\mathbf{h}(\omega,\mathbf{z})\overset{\text{def}}{=}\mathbf{A}(\omega)\mathbf{z}-\mathbf{b}(\mathbf{z}) \quad (2)$$

代数迭代方程

响应和力的Fourier展开

$$\mathbf{q}(t)\approx\frac{\mathbf{c}_0^q}{\sqrt{2}}+\sum_{k=1}^{N_H}\left(\mathbf{s}_k^q\sin\frac{k\omega t}{\upsilon}+\mathbf{c}_k^q\cos\frac{k\omega t}{\upsilon}\right)$$

$$\mathbf{f}(t)\approx\frac{\mathbf{c}_0^f}{\sqrt{2}}+\sum_{k=1}^{N_H}\left(\mathbf{s}_k^f\sin\frac{k\omega t}{\upsilon}+\mathbf{c}_k^f\cos\frac{k\omega t}{\upsilon}\right)$$

将**q**和**f**的Fourier系数表示为向量

$$\mathbf{z}=\begin{bmatrix}c_0^{q_1} & c_1^{q_1} & s_1^{q_1} & \cdots & c_{N_H}^{q_n} & c_{N_H}^{q_n}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}c_0^{f_1} & c_1^{f_1} & s_1^{f_1} & \cdots & c_{N_H}^{f_n} & c_{N_H}^{f_n}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

快速Fourier变换进行时频域变换。

1 时频域结合的技术： $\mathbf{z}\xrightarrow{\text{逆Fourier变换}}\mathbf{q}(t)\xrightarrow{\text{时域计算}}\mathbf{f}(\omega,t;\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q})\xrightarrow{\text{Fourier变换}}\mathbf{b}(\mathbf{z})$

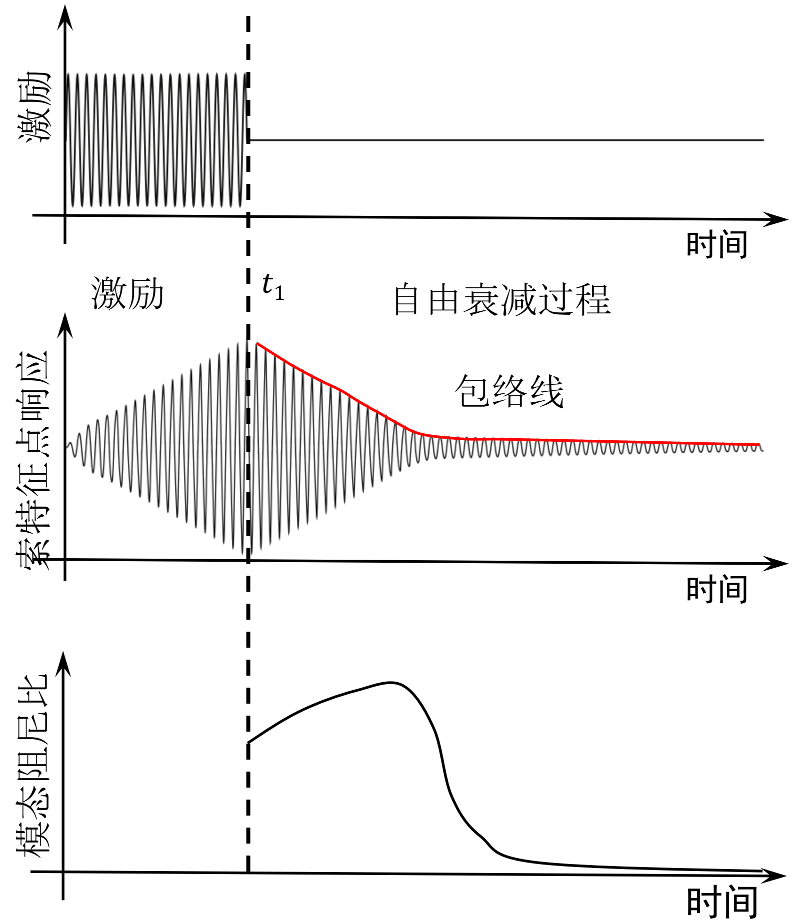
2 采用Newton－Raphson进行求解时，**残差函数导数的解析表达式**对计算效率至关重要

谐波平衡(Harmonic Balance)方法

- 单自由度系统推导实例
  - 系统方程 $\ddot{q} + \dot{q} + q + f_{nl}(q, \dot{q}) = f(t)$
  - 周期性外力 $f(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$
  - Fourier展开(保留一项) $q(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$
  - 代入方程
    $$-a\omega^2\cos(\omega t) - b\omega^2\sin(\omega t) - a\omega\sin(\omega t) + b\omega\cos(\omega t) + a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) + f_{nl}(q, \dot{q}) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$
  - 非线性项的处理：引入近似(仅保留一项)
    - $f_{nl}(q, \dot{q}) \approx C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$
    - 得到$\sin(\omega t)$和$\cos(\omega t)$的系数方程
      $$-a\omega^2 + b\omega + a + C = A$$
      $$-b\omega^2 - a\omega + b + D = B$$
  - 伽辽金方法

斜拉索-非线性阻尼器系统参数优化

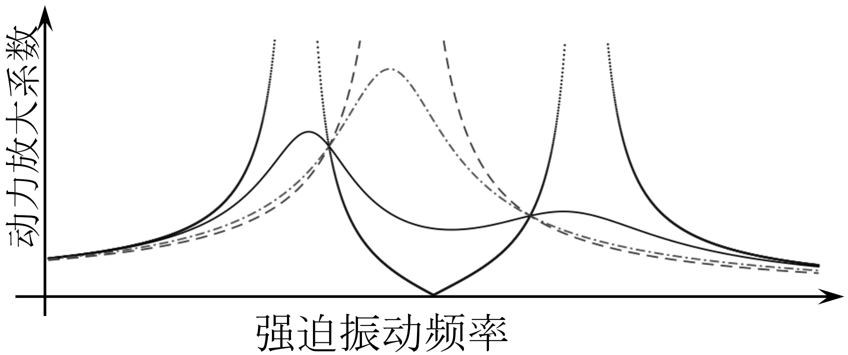
- 现有方法
  - 基于等效线性化的方法
  - 基于数值积分的分析
    - 自由衰减响应分析[1]
    - 随机响应分析
  - 现有方法 / 研究的局限性
    - 积分方法效率低(系统阻尼小)
    - 现有分析针对特定系统
    - 系统自由衰减过程中其非线性发生改变

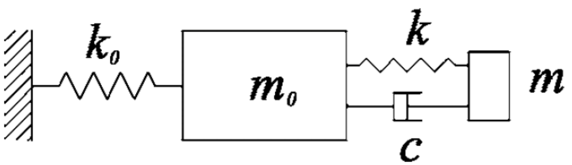


[1] Weber, F., Høgsberg, J., & Krenk, S. (2010). Optimal Tuning of Amplitude Proportional Coulomb Friction Damper for Maximum Cable Damping. *Journal of Structural Engineering*, 136(2), 123-134.
[2] Johnson, E., Baker, G., Spencer, B., & Fujino, Y. (2007). Semiactive Damping of Stay Cables. *Journal of Engineering Mechanics*, 133(1), 1-11.

斜拉索-非线性阻尼器系统参数优化

- 基于周期性强迫振动响应的方法
  - 基于强迫振动的结构减振系统(TMD)





$$m_0\ddot{x}_0 + m(\ddot{x}_0 + \ddot{x}_d) + k_0 x_0 = F(t)$$

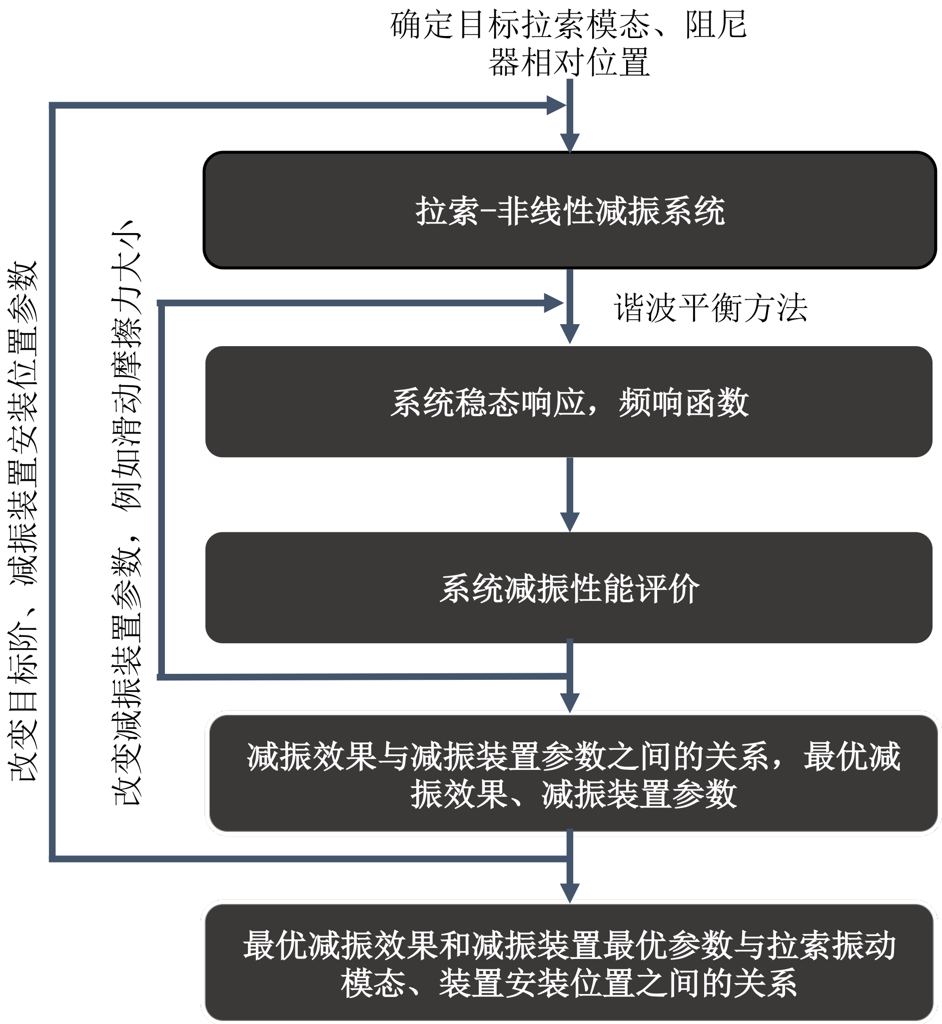
$$m(\ddot{x}_0 + \ddot{x}_d) + c\dot{x}_d + kx_d = 0$$

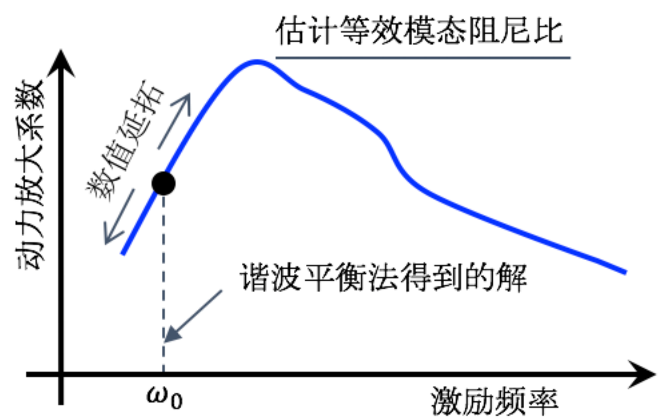
  - 基于强迫振动的斜拉索参数优化的优点
    - 可采用谐波平衡法求解，更高效
    - 结合数值延拓，进一步提高分析效率
    - 系统振动达到稳态，系统的非线性特性不变，有利于分析响应特点
    - 系统无量纲化，得到系统一般特性

[1] Krenk, S. (2005). Frequency Analysis of the Tuned Mass Damper. *Journal of Applied Mechanics, 72*(6), 936-942.
[2] Chen, L., & Sun, L. (2016). Steady-State Analysis of Cable with Nonlinear Damper via Harmonic Balance Method for Maximizing Damping. *Journal of Structural Engineering*, 04016172.

斜拉索-非线性阻尼器系统参数优化

❑ 步骤



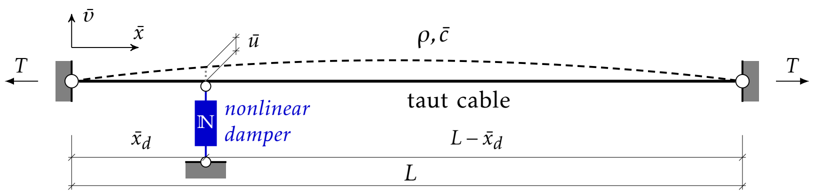


斜拉索-非线性阻尼器系统参数优化

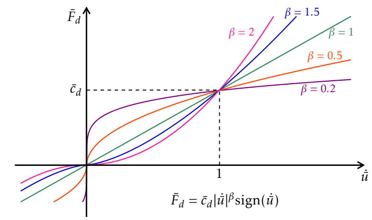
❑ 分析结果

❑ 周期响应

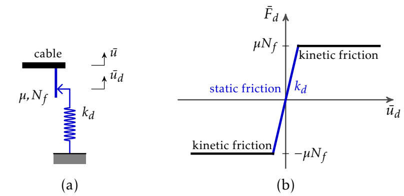
索-阻尼器系统



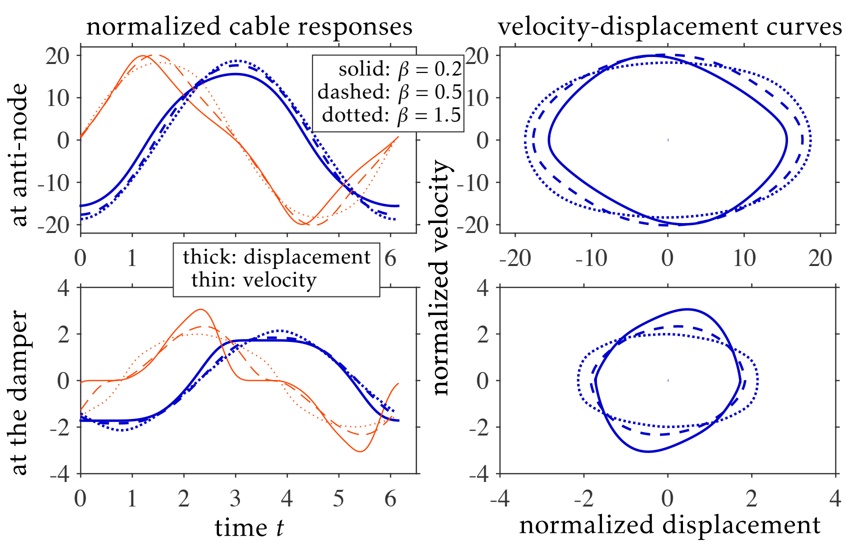
非线性粘滞阻尼器



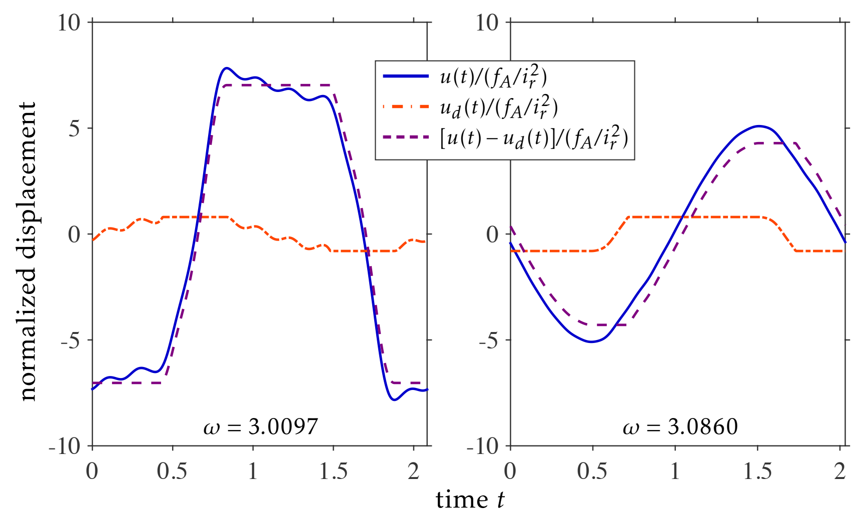
摩擦型阻尼器



拉索附加非线性粘滞阻尼器后的周期响应

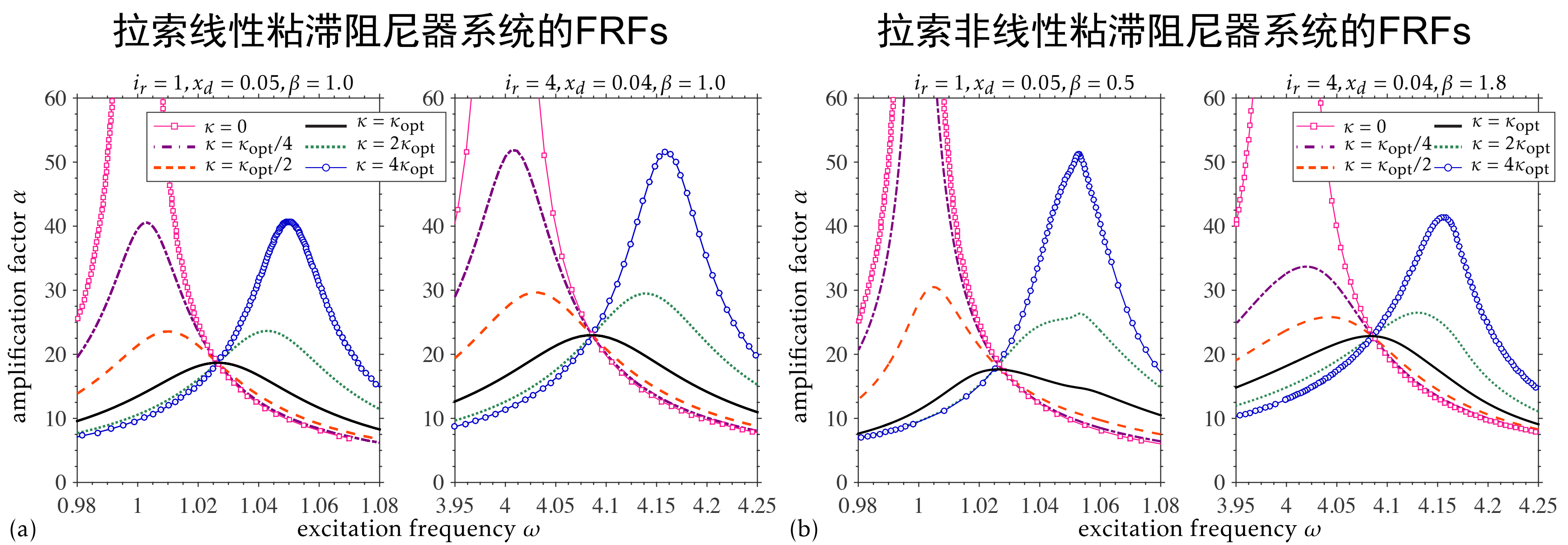


拉索附加摩擦阻尼器后的周期响应



斜拉索-非线性阻尼器系统参数优化

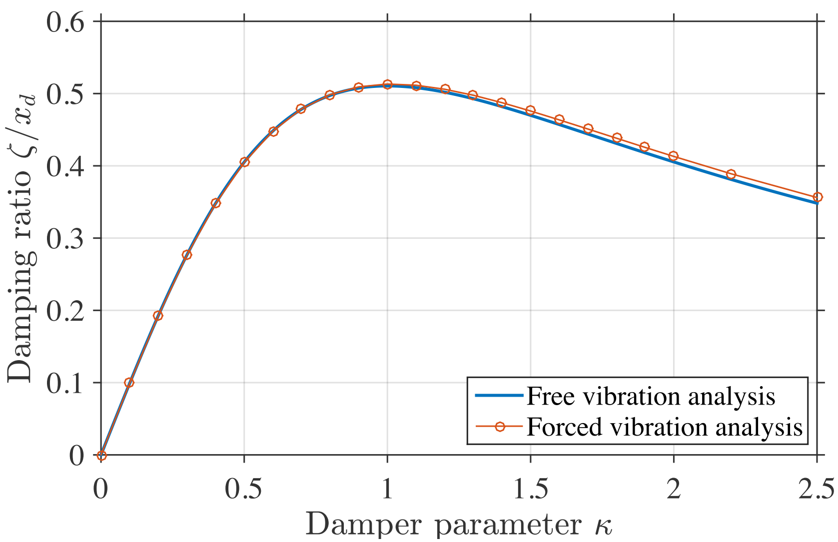
- 分析结果
  - 频响函数(FRF)
    - 索跨内振幅最大位置的振幅与周期性荷载频率之间的关系曲线
    - 根据频响曲线的峰值估计等效模态阻尼比
    - 改变阻尼系数，绘制阻尼曲线



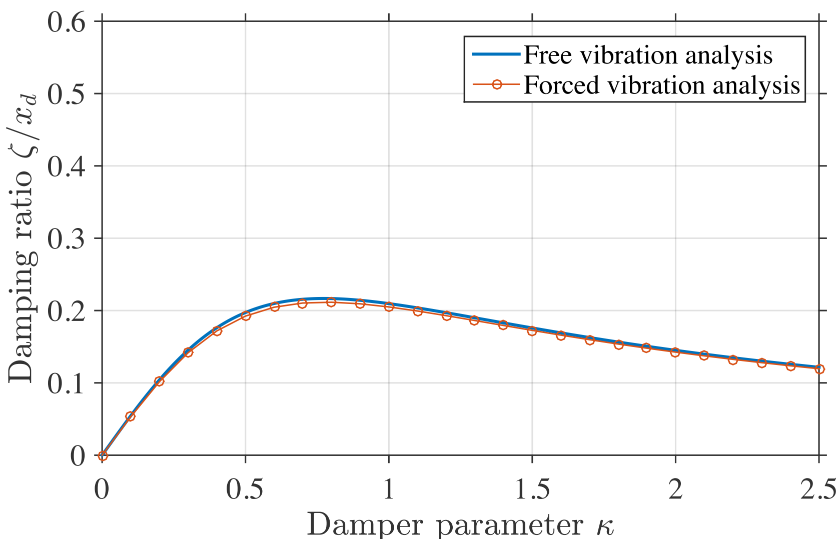
斜拉索-非线性阻尼器系统参数优化

- 分析结果
  - 基于粘滞阻尼器的方法验证，对比
    - 解析的阻尼曲线
    - 基于频响函数得到的阻尼曲线
    - 考虑了垂度的影响

阻尼器安装于索长2%位置、不考虑垂度



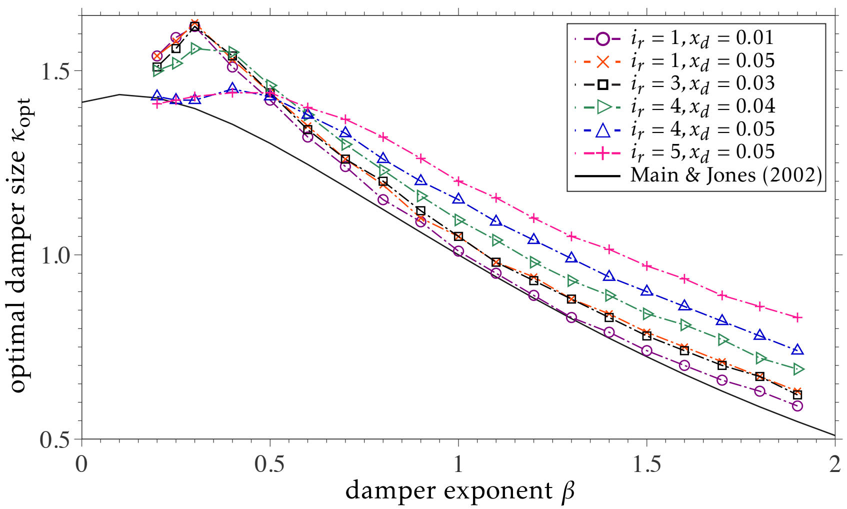
阻尼器安装于索长2%位置、Irvine参数=8



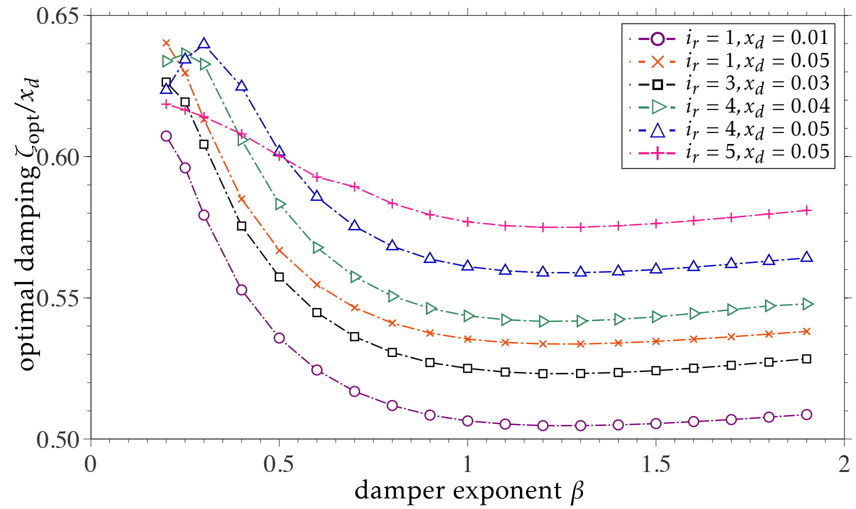
斜拉索-非线性阻尼器系统参数优化

- 分析结果
  - 基于参数分析得到如下结论
    - 非线性阻尼器能实现更大的最优模态阻尼比：可最大提高20%；
    - 对于特定的系统，可能存在最合适的非线性实现最大最优模态阻尼比；
    - 非线性阻尼器引起振动能量转向索高阶振动并以更快的速度耗散。

非线性粘滞性阻尼器最优阻尼器系数与阻尼器非线性间的关系曲线



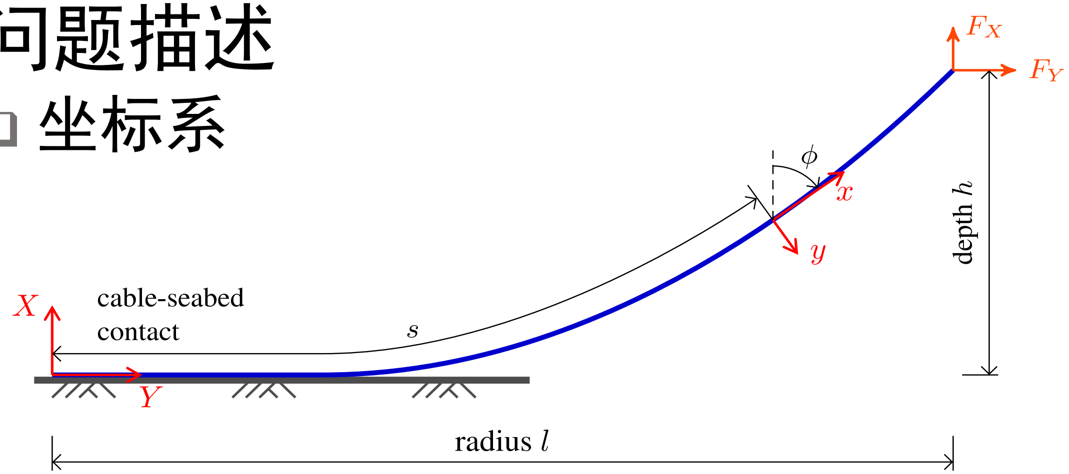
非线性粘滞性阻尼器提供的最优阻尼器与阻尼器非线性间的关系曲线



水下缆绳的周期性响应分析

❑ 问题描述

❑ 坐标系



❑ 系统方程(二维问题为例)

$$T'(\varepsilon)\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} - m\frac{\partial u}{\partial t} + mv\frac{\partial \phi}{\partial t} - w_0 \cos\phi + F_{dt} = 0$$

$$T(\varepsilon)\frac{\partial \phi}{\partial s} - mu\frac{\partial \phi}{\partial t} - (m + m_a)\frac{\partial v}{\partial t} + w_0 \sin\phi + F_{dn} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} - v\frac{\partial \phi}{\partial s} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + u\frac{\partial \phi}{\partial s} - (1+\varepsilon)\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

X, Y: 固定坐标系坐标轴

x, y: 移动坐标系坐标轴

s: 缆绳弧长坐标（未张拉长度）

ϕ: 缆绳切向与竖直方向夹角

$\varepsilon, T'(\varepsilon)$: 应变、拉力、刚度

$T(\varepsilon)$: 轴向刚度

m: 单位长度质量

w_0:水下单位长度重量

u, v: 切向、法向速度

F_{dt}, F_{dn}:切向、法向拖拽力

m_a: 单位长度附加质量

t: 时间

水下缆绳的周期性响应分析

系统方程

矩阵形式

$$\bar{\mathbf{M}}\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}+\bar{\mathbf{K}}\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s}+\widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{y})\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}+\widetilde{\mathbf{K}}(\mathbf{y})\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s}+\mathbf{f}(\mathbf{y})=0$$

空间离散：中心差分法

$$\begin{aligned}&[\bar{\mathbf{M}}_{n-1}\quad \bar{\mathbf{M}}_{n}]\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{y}}_{n-1}\\ \dot{\mathbf{y}}_{n}\end{Bmatrix}+\frac{1}{\Delta s_{n-1}}[-\bar{\mathbf{K}}_{n-1}-\bar{\mathbf{K}}_{n}\quad \bar{\mathbf{K}}_{n-1}+\bar{\mathbf{K}}_{n}]\begin{Bmatrix}\mathbf{y}_{n-1}\\ \mathbf{y}_{n}\end{Bmatrix}+[\widetilde{\mathbf{M}}_{n-1}\quad \widetilde{\mathbf{M}}_{n}]\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{y}}_{n-1}\\ \dot{\mathbf{y}}_{n}\end{Bmatrix}\\ &+\frac{1}{\Delta s_{n-1}}[-\widetilde{\mathbf{K}}_{n-1}-\widetilde{\mathbf{K}}_{n}\quad \widetilde{\mathbf{K}}_{n-1}+\widetilde{\mathbf{K}}_{n}]\begin{Bmatrix}\mathbf{y}_{n-1}\\ \mathbf{y}_{n}\end{Bmatrix}+\mathbf{f}_{n-1}+\mathbf{f}_{n}=0\end{aligned}$$

$$\boxed{[\bar{\mathbf{M}}_{n-1}\quad \bar{\mathbf{M}}_{n}]\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{y}}_{n-1}\\ \dot{\mathbf{y}}_{n}\end{Bmatrix}+[-\bar{\mathbf{K}}_{n-1/2}\quad \bar{\mathbf{K}}_{n-1/2}]\begin{Bmatrix}\mathbf{y}_{n-1}\\ \mathbf{y}_{n}\end{Bmatrix}+\tilde{\mathbf{f}}_{n-1/2}=0}$$

谐波平衡法求解

水下缆绳的周期性响应分析

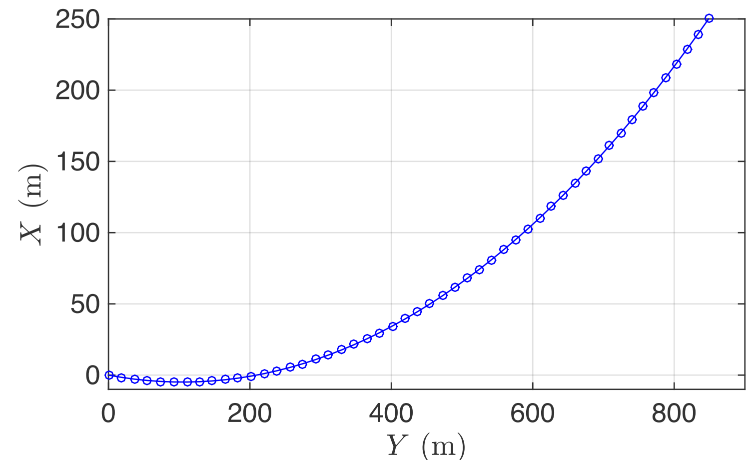
❑ 算例-参数及静力响应

❑ 缆绳参数

缆绳及其他参数	单位	值
缆绳外径	m	0.09
缆绳单位长度质量	kg/m	77.7066
缆绳长度	m	902.2
缆绳轴向刚度	N	384,243,000
缆绳两端点初始的竖向和横向间距	m	250, 848.67
水密度	kg/m^3	1025
缆绳在水中的单位长度重量	N/m	698.094
附加质量系数	-	1.0
水拖拽力系数	-	0, 1.6

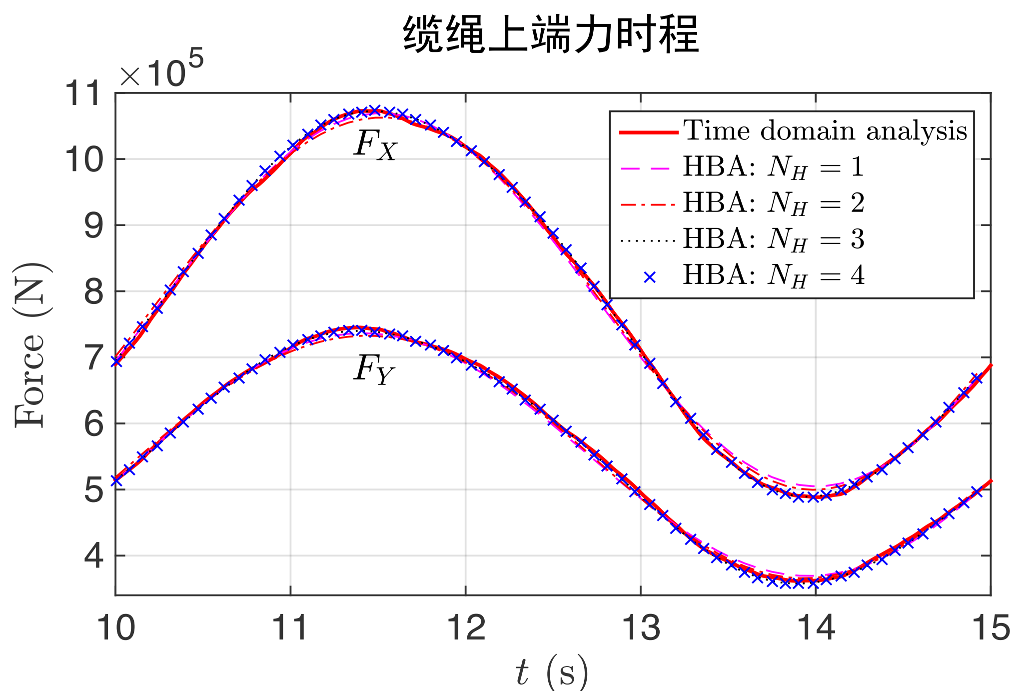
❑ 缆绳静力线型

- ❑ 离散为49段，50个节点
- ❑ 不考虑与海床接触
- ❑ 考虑海水静止
- ❑ 快速Fourier变化采用64个时间点



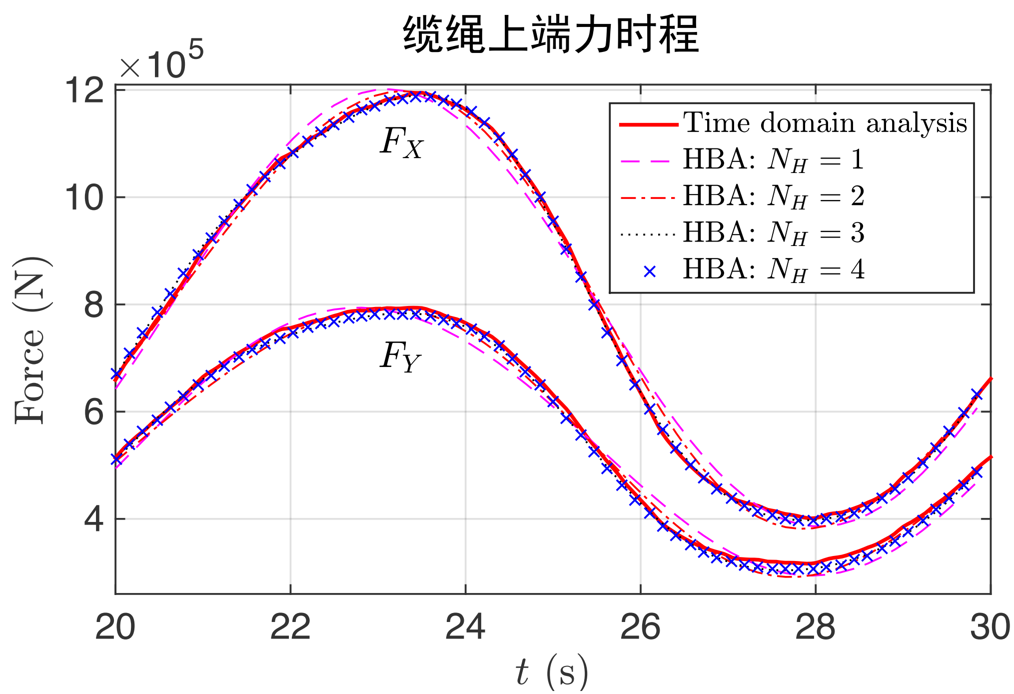
水下缆绳的周期性响应分析

- 算例1
  - 缆绳上端水平发生简谐运动振幅1.0 m频率0.2 Hz
  - 计算时间对比：
    - 时域(3周期，步长0.02 s)：184.2 s
    - HB($N_H = 1$)： 34.3 s
    - HB($N_H = 2$)： 63.6 s
    - HB($N_H = 3$)： 102.5 s
    - HB($N_H = 4$)： 127.6 s



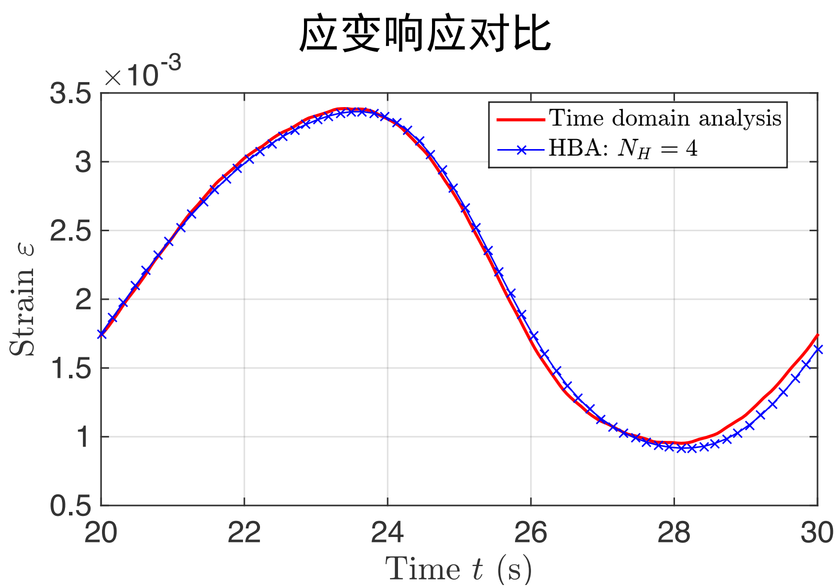
水下缆绳的周期性响应分析

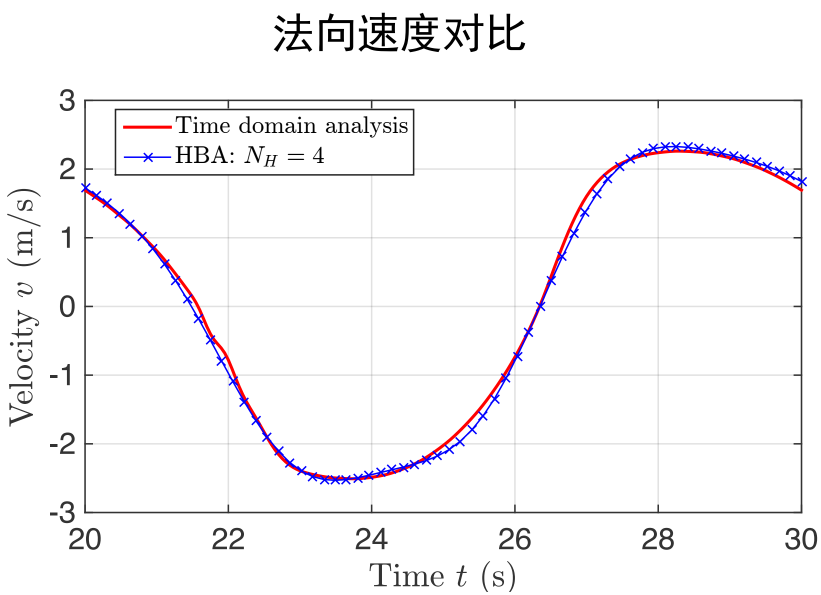
- 算例1
  - 缆绳上端水平发生简谐运动振幅3.0米频率0.1Hz
  - 计算时间对比：
    - 时域(3周期，步长0.02 s)：140.4 s
    - HB($N_H = 1$)： 32.5 s
    - HB($N_H = 2$)： 61.0 s
    - HB($N_H = 3$)： 86.8 s
    - HB($N_H = 4$)： 113.4 s



水下缆绳的周期性响应分析

- 算例2
  - 缆绳上端水平发生简谐运动振幅3.0米频率0.1Hz
  - 缆绳中部响应对比(节点25)
    - 应变响应对比
    - 法向速度对比





小结与展望

- 小结
  - 谐波平衡法介绍
  - 应用于斜拉索阻尼器优化设计
  - 应用于水下缆索非线性析

- 展望
  - 非线性模态分析
  - 非线性模态识别
  - 基于非线性模态分析的斜拉索非线性阻尼器参数优化

谢谢!