浅议现代信号分析
Modern Signal Processing
框架、应用与思考

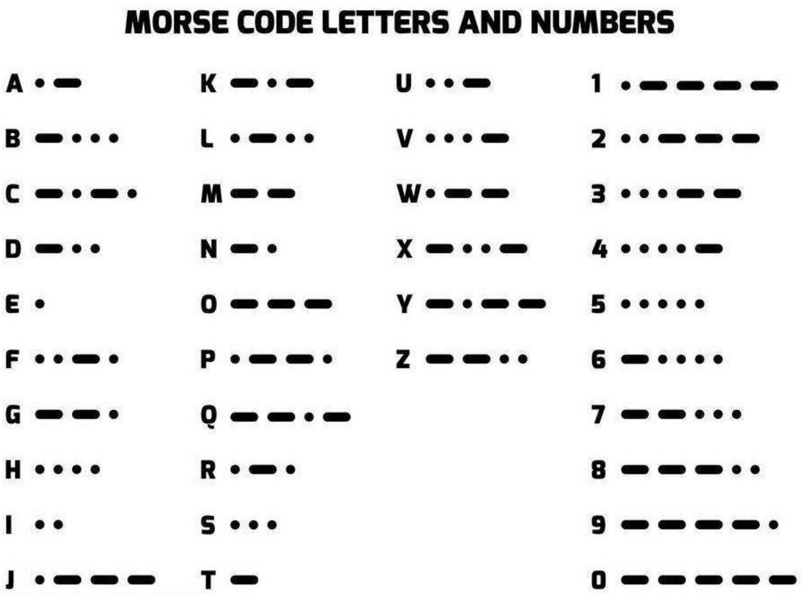
桥梁振动控制与健康监测教研室
2017级硕士 简旭东

何为信号分析?

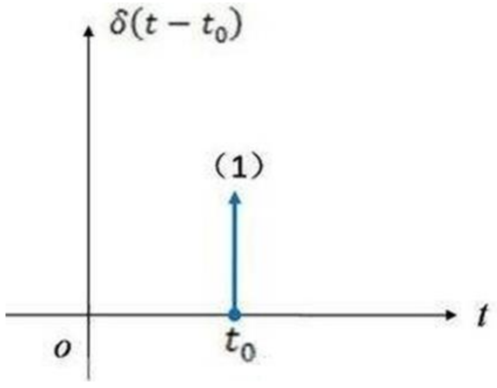
信号分析的最终目标：提取信号特征，解读特征中的信息

如果把信号比作一份加密的情报，信号分析就是破译这份情报

如何破译? 信号建模



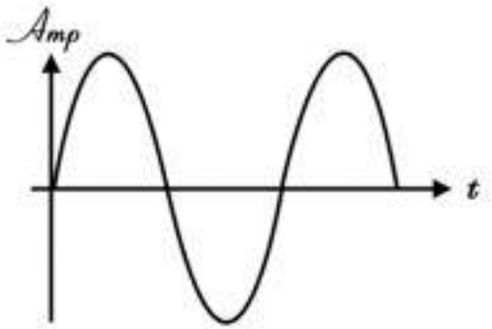
MORSE电码：解码与组合，得到电报



时域脉冲基函数

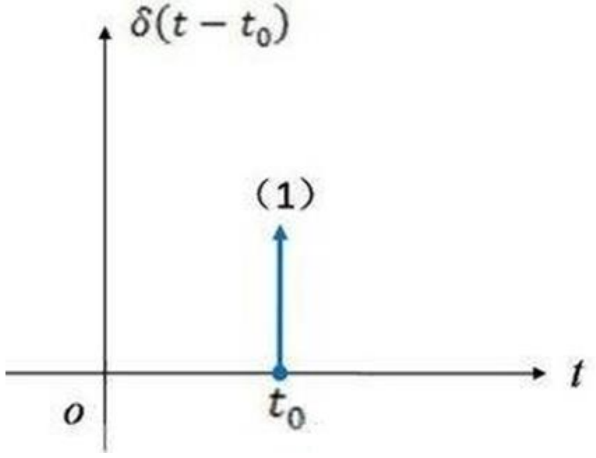
Fourier变换对

频域谐波基函数



信号分析问题的框架

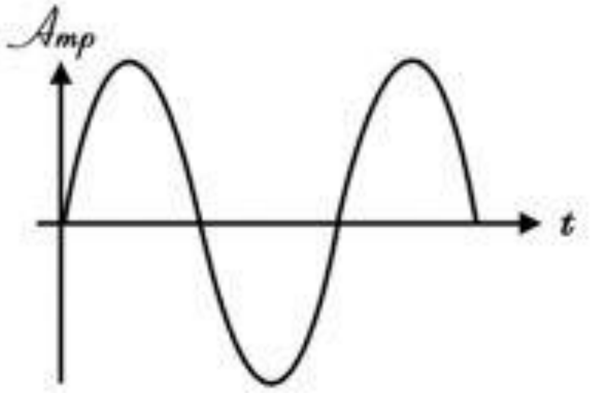
基于上述，信号分析的核心任务就是信号建模，选择模型种类就是信号分析的正问题。



脉冲模型
时域脉冲基函数

Fourier变换对

谐波模型
频域谐波基函数



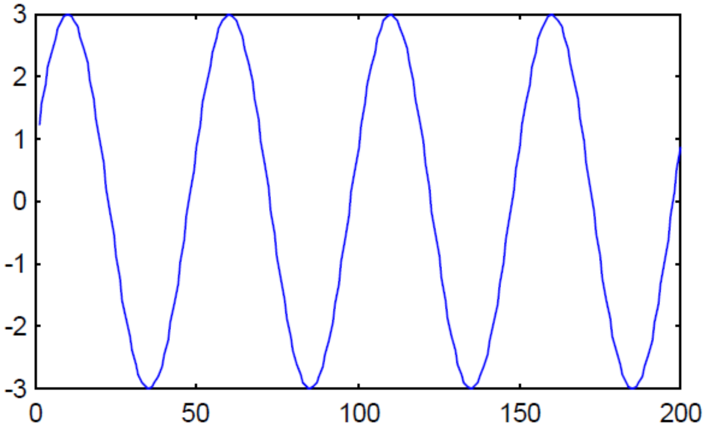
$$\widehat{f}(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i(t)$$

求解信号模型的系数就是信号分析的反问题

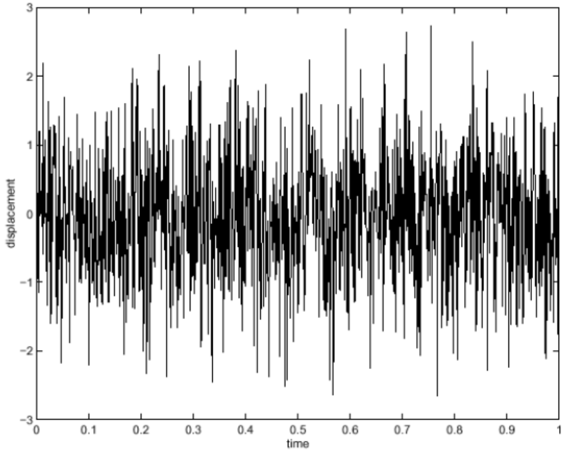
$$\min\left[f(t)-\widehat{f}(t)\right]$$

反问题的着眼点是使模型与真实信号之间误差最小

何为“现代”信号分析？



大自然肯定是随机的



经典信号分析——确定信号分析 → 现代信号分析——随机信号分析

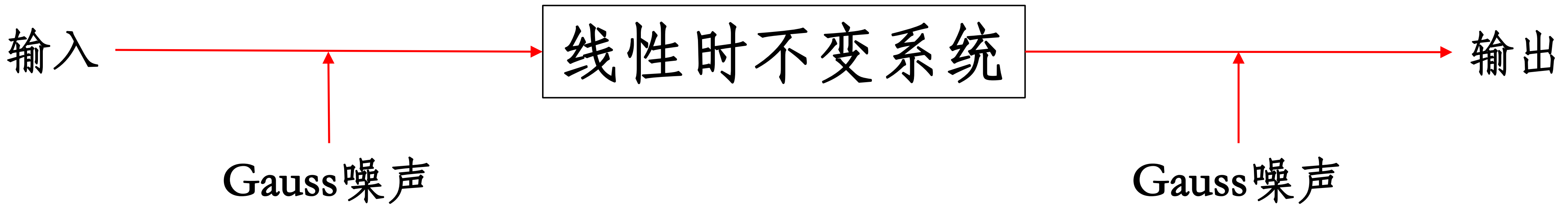
	经典信号分析	现代信号分析
特点	信号确定，因此信号模型参数确定	信号是随机过程，因此信号模型参数是随机变量
方法	时域卷积运算、频域Fourier分析	在确定信号分析的基础上补充参数估计
核心数学知识	复变函数（积分变换）	随机过程（估计）、泛函分析（优化）

一阶统计量：随机信号的数学期望

二阶统计量	定义	特点	含义
自（互）相关函数	略	时域	信号在时域上的相关性
自（互）协方差函数			
互相关函数			
自（互）功率谱函数		频域	信号在频域上的能量分布
自（互）功率谱密度			
相干函数			

在此基础上定义广义平稳信号（即二阶平稳）、均方遍历信号、独立信号、相关信号、正交信号

早期的随机信号分析理论，是建立在“平稳、Gauss、线性”的假设之上的



如何选取基函数？如何求解基函数系数？

$$\|\boldsymbol{X}\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

信号空间

元素 → 代数特征(范数) → 2范数(空间距离) → 平方可积函数空间(Hilbert空间)

赋范空间

距离空间

规则 → 线性运算(叠加) → 平方可积函数空间(Hilbert空间)

线性向量空间

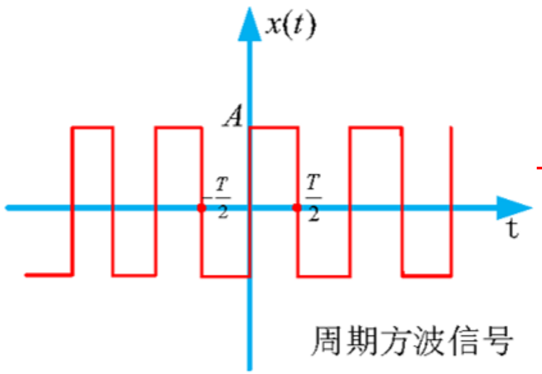
规则 → 能量守恒(完备) → 平方可积函数空间(Hilbert空间)

完备空间

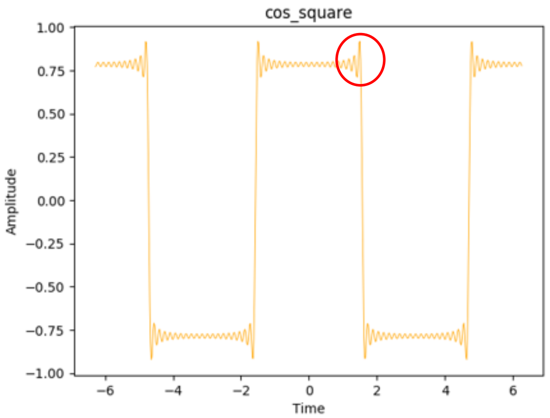
一组好的基函数应该有的特点：精度高的同时，数量要少

精度高：基函数要能够体现信号的特征

数量少：基函数之间的冗余信息越少越好



FT



$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots$$

Fourier变换：特征与方波不符，拟合时存在Gibbs现象

Taylor级数：不同基函数之间关联性强，冗余信息多

平方可积函数空间内的信号分析：利用特征向量彻底地解相关——KL变换

参数估计理论——求解最优信号模型

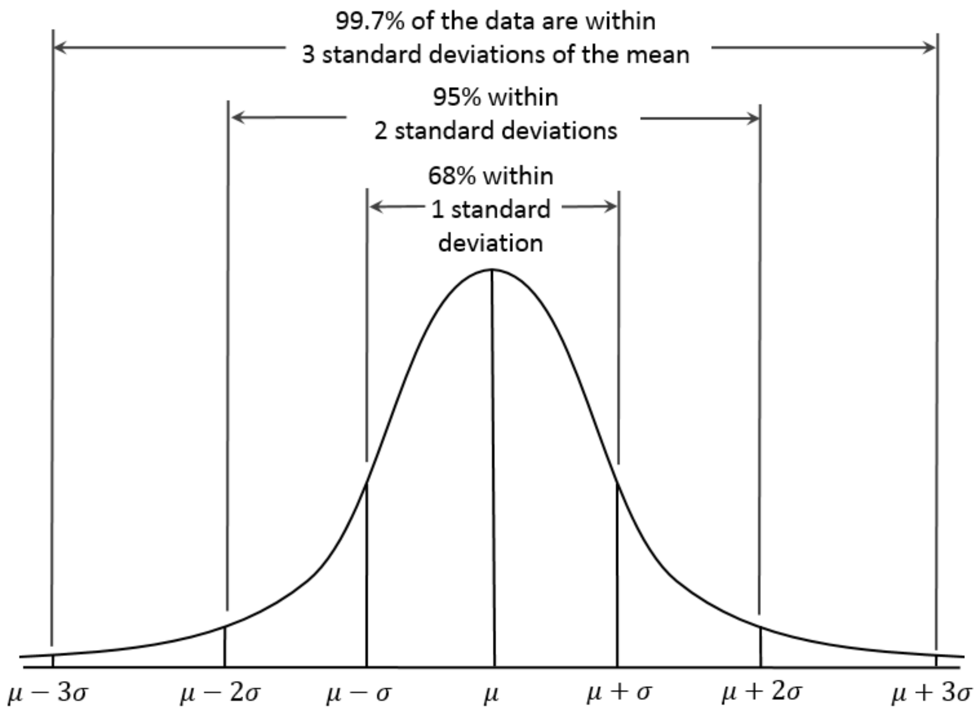
描述随机信号的基本数学模型是概率密度函数(Probability Density Function)
估计概率密度函数中的统计量(比如期望和方差)是参数估计的基本任务

有必要求信号模型的PDF吗？当然有。
能够求得信号模型的PDF吗？困难，因为试验次数有限(当然现在的SHMS可以进行很多次试验)。

所以，一般假设随机参数服从Gauss分布，原因有三：大数定律；Gauss线性；单峰分布
那么随机信号的参数估计就退化为，利用最优化方法寻找代价泛函最小的Gauss模型参数，即期望与方差

如何定义最优?
①无偏性：$b(\hat{\theta}) = E\{\hat{\theta}\} - \theta = 0$
②一致性：$min\{var(\hat{\theta})\}$

这样的最优估计方法就叫做Bayes估计



Bayes估计：首先定义损失函数$C(\theta,\hat{\theta})$，即估计值与真实值之间的误差。
然后定义风险函数$R(\theta,\hat{\theta})=E\{C(\theta,\hat{\theta})\}$。Bayes估计就是使风险函数R最小的估计。

根据风险函数定义的不同，Bayes估计的具体形式可以分为：
① 最小均方误差方法，Minimum Mean Square Error，MMSE
② 最大后验概率估计，Maximum of the A Posterior Density，MAP
③ 最大似然估计，Maximum Likelihood，ML
④ 线性均方估计，Linear Mean Squares，LMS
⑤ 最小二乘估计，Least Square，LS
⑥ 加权最小二乘估计，Weighted Least Square，WLS

以上方法均基于Bayes估计思想
可操作性是逐渐提高的，即①最不好操作，⑥最好操作。因为物理意义越来越明确。
数学上的严谨性是逐渐退化的，即①最严谨，⑥最不严谨。

工程师的方法：LMS/LS，模型驱动 ⟷ 统计学家的方法：ML，纯数据驱动
为机器学习和大数据分析埋下了伏笔

观测信号=理想信号+~~噪声~~

↑

滤波器

所谓最佳滤波，就是基于参数估计理论对信号进行最佳建模，然后减去噪声。美国应用数学家Wiener最早提出，使用线性均方(LMS)方法对Gauss平稳随机信号进行最优滤波器的参数估计，此时最佳滤波可以被称为Wiener滤波。

$$\hat{\theta}_{LMS} = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i \longrightarrow J = E\left\{(\hat{\theta}-\theta)^2\right\} \longrightarrow \frac{\partial J}{\partial w_k} = 0 \longrightarrow [w_k]$$

①需要用到全局二阶统计量：协方差矩阵$C_{xx}(\tau) = E\{[x(t)-\mu_x][x(t-\tau)-\mu_x]^*\}$

②需要用求极值的方法来求最值

③这一套求最优系数w_k的方法其实就是神经网络的思想源泉

Wiener滤波有以下缺陷：
①需要用到二阶统计量：信号不平稳，二阶统计量是变量怎么办?

针对这个问题，一般来说，信号的非平稳性是有限的(否则就没有研究价值)，这时可认为信号是局部平稳的，在此假设下，匈牙利裔美国电气工程师Kalman提出Kalman滤波，实现局部最佳滤波。

Kalman滤波：线性AR模型。递推迭代，每一时刻都用观测新信息修正预测模型。其优势在于用每个局部的最优实现全局的最优（类似有限元的思想）。当信号平稳时，Kalman滤波可以退化为Wiener滤波。

$$\underbrace{\mathbf{x}_k}_{\text{经修正的 k时刻预测}} = \underbrace{\mathbf{F}_k\mathbf{x}_{k-1}}_{\text{k-1时刻 物理模型的预测}} + \underbrace{\mathbf{B}_k\mathbf{u}_k}_{\text{k时刻 观测值的修正}} + \underbrace{\mathbf{w}_k}_{\text{噪声}}$$

Kalman滤波的成名之战：NASA主导的Apollo登月

Wiener滤波有以下缺陷：

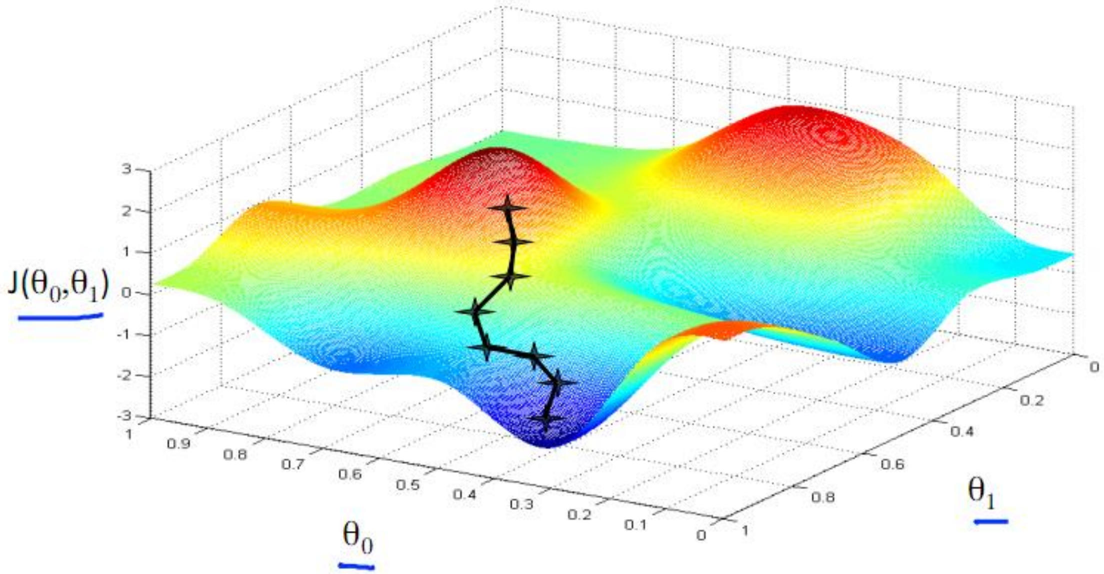
②需要知道响应的全局协方差矩阵，这样的先验知识很难获取的，因此不便于应用

针对这个问题，提出了自适应滤波器。自适应滤波器以期望响应为“导师”，输入信号通过滤波器输出对期望响应进行估计，递推更新滤波器系数，梯度下降，不断降低误差，最后得到一组逼近最优滤波器的滤波器系数w_{k_opt}。

如果信号是弱非平稳的，且非平稳变换速率慢于自适应滤波器的学习速率，此时自适应滤波器还能自适应地跟踪这种非平稳变化。

形象地说，就是用“边走边看”取代“一劳永逸”

自适应滤波器就是B-P人工神经网络的雏形！！！

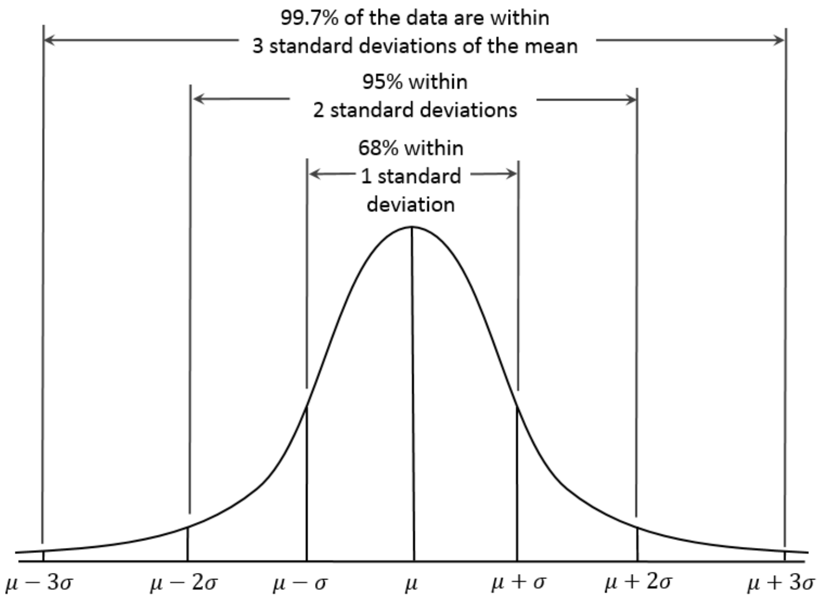


自适应滤波器的经典应用：

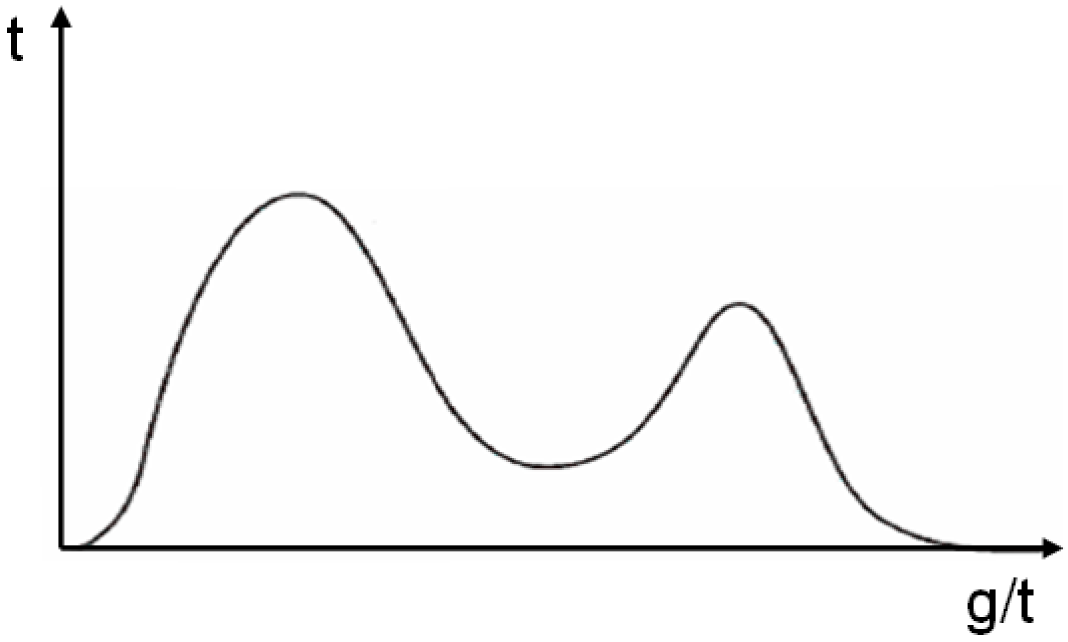
主动振动控制、主动降噪耳机（干扰对消）

Wiener滤波有以下缺陷：
③需要用求极值的方法来求最值：代价函数的分布非Gauss，不是单峰怎么办?

针对这个问题，需要放弃Gauss假设，引入高阶统计量。



√



?

现代谱估计——稳、准、狠

谱：换一个角度，从频域考量信号。

经典的谱分析方法基于Wiener-Khinchin定理，直接对随机信号进行谱分析完全没有用上参数估计理论，因此也叫非参数化谱估计

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_X(w) E^{jw\tau} dw \quad \xleftrightarrow{\text{Fourier变换对}} \quad P_X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-jw\tau} d\tau$$

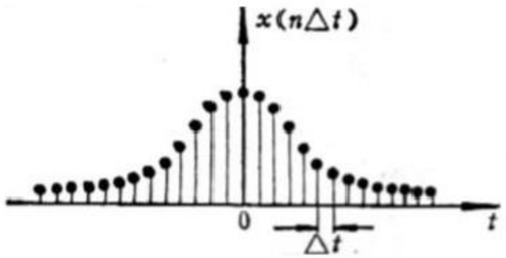
时域　　　　频域

经典谱分析方法的缺陷：

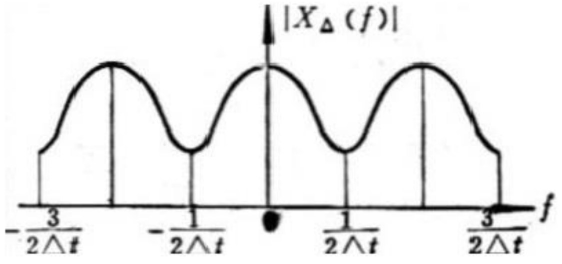
①周期图法的弊端：渐进无偏，分辨率低

②为减小泄露，必须加窗函数，非常繁琐

离散时域

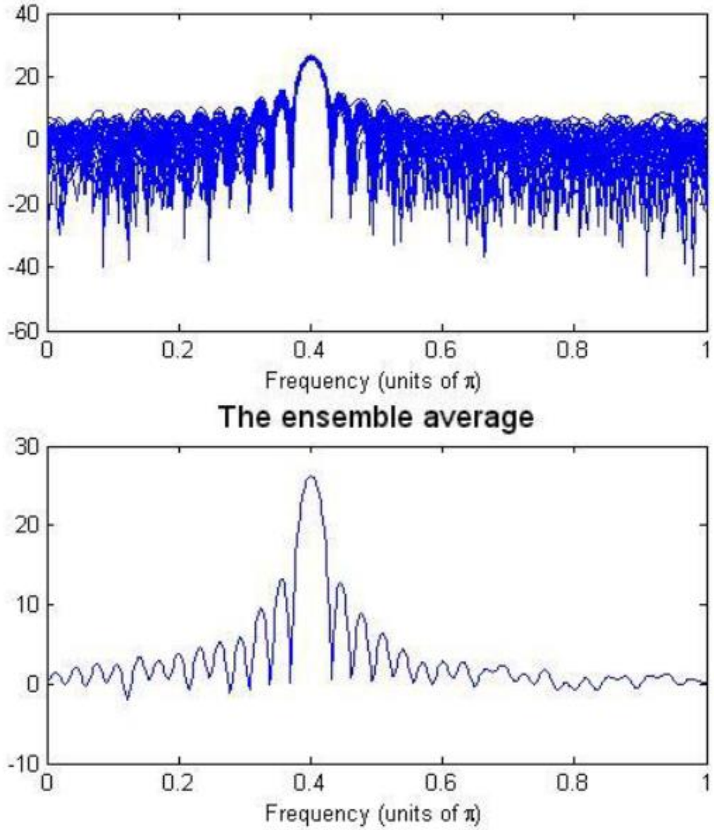


周期频域

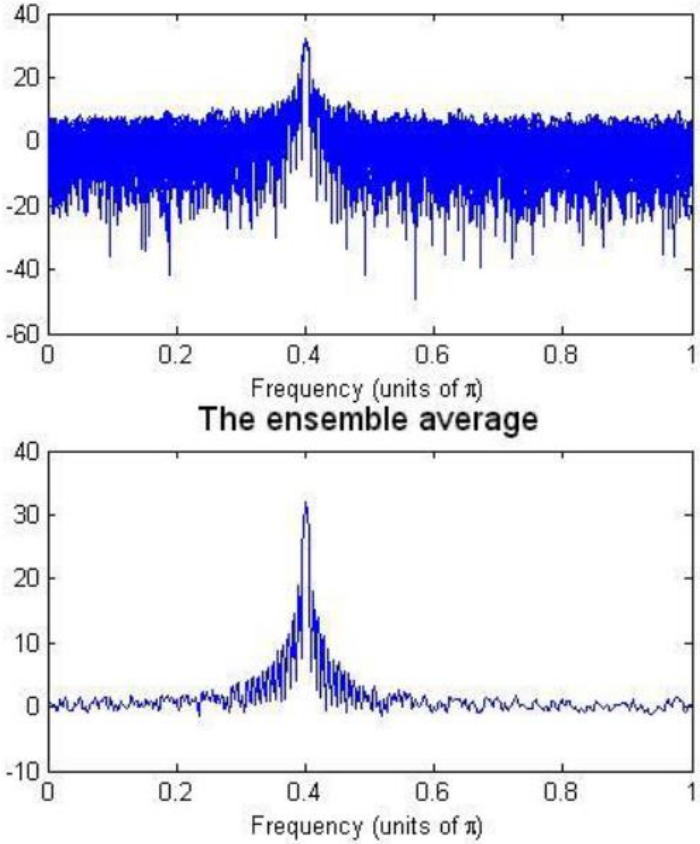


矩形窗、三角窗、Hamming窗、Hann窗、Barlett窗、Blackman窗、Chebyshev窗、Gauss窗、Kaiser窗、Bohman窗……

③非一致性：谱估计的方差并不是0



$N = 128$



$N = 512$

我们在进行功率谱分析时经常可以发现

增大N，分辨率提高，但同时方差增大，毛刺增多

这是经典谱分析不可调和的矛盾

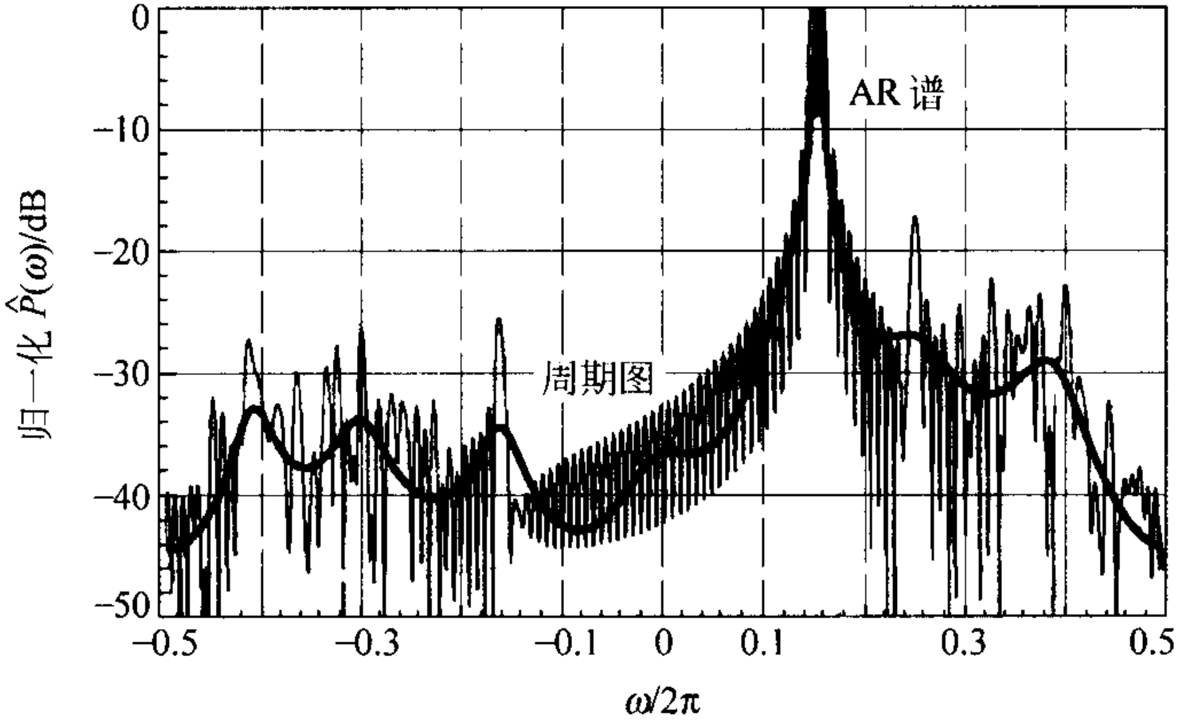
现代谱估计——稳、准、狠

怎么克服经典谱分析的弊端？现代谱估计

现代谱估计：利用参数估计理论（所以这一方法也叫参数化谱估计），对信号进行建模。那么就可以将观测信号划分为理想信号与噪声，然后只对理想信号进行谱分析。

参数化谱估计具有一致性，且其分辨率要显著高于非参数化谱估计，因为该方法进行了滤波降噪。唯一的不足是计算速度稍慢，但这不是问题。

基于时域模型	基于频域特征空间模型
AR模型谱估计	Pisarenko谐波分解
MA模型谱估计	ESPRIT算法
ARMA模型谱估计	MUSIC算法
	CLEAN算法
	扩展Prony方法



高阶谱估计——通向新世界的大门

前面的理论框架基于以下假设：

① 信号模型中的系统是线性且最小相位的

② 噪声是Gauss白噪声

③ 噪声与信号统计无关

由此推导出的基于二阶统计量的方法具有以下特点：

① 把随机序列视为一系列统计不相关的谐波分量的叠加（线性系统）

② 各谐波之间相位不耦合（FT也有相位谱？），因此完全不能分析相位耦合问题

③ 只使用二阶统计量（Gauss模型最高只有二阶统计量）

实际问题显然要复杂得多：

① 经过塑性材料的信号是非线性的！事实上自然界很少有线性行为。

② 通过界面反射的信号与原始信号之间是相位耦合的！系统是非最小相位的！

③ 自然界不存在真正的Gauss白噪声，噪声基本都是非Gauss的！

所以说，基于二阶统计量的信号分析方法，从根本上就不可能准确地分析复杂问题！

二阶统计量只能刻画信号的主干，高阶统计量才能刻画信号的细节！

所以说二阶统计量叫“相关”而不是“相同”！

当然，也不是说刻画信号细节一定需要高阶统计量，Gauss信号只存在二阶统计量，但遗憾的是，我们的世界并不是Gauss的。

$$c_1(0) = m_1 = E[x]$$ 一阶

$$c_2(\tau_1) = m_2 - m_1^2 = E[(x - m_1)^2]$$ 二阶

$$c_3(\tau_1, \tau_2) = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3 = E[(x - m_1)^3]$$ 三阶

$$c_4(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = m_4 - 3m_2^2 - 4m_1 m_3 + 12m_1^2 m_2 - 6m_1^4 \neq E[(x - m_1)^4]$$ 四阶

……………………

当$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$时，特别称：

① $c_1(0)$为期望，描述了概率分布的中心

② $c_2(0)$为方差，描述了概率分布的离散程度

③ $c_3(0,0)$为斜度，描述了概率分布的不对称程度

④ $c_4(0,0,0)$为峭度，描述了概率分布的尖锐程度?

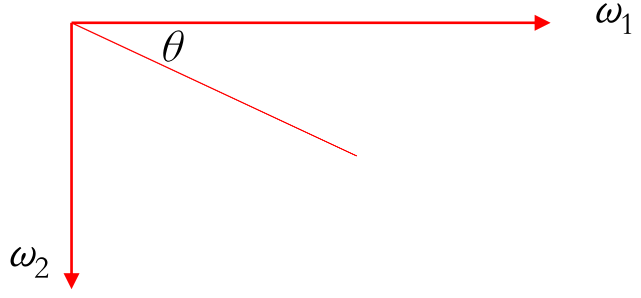
事实上，阶数越高，物理意义越不明确（类似于空间维度）

将Wiener-Khinchin定理推广到高阶统计量，就可以得到高阶谱

① 二阶谱即功率谱，是单个频率的谱

② 三阶谱称为双谱，是两个频率的谱（复函数，因此能够体现相位耦合）

③ 四阶谱称为三谱，是三个频率的谱



基于高阶统计量的特点，它可以有以下应用：

① 定量辨识非Gauss程度：高阶统计量越大，非Gauss性越强

② 定量辨识非线性程度：利用Gauss信号通过线性系统仍然是Gauss的这一特点。

③ 定量辨识非最小相位程度与相位耦合程度：高阶统计量越大，相位耦合程度越高。

④ 分离高斯信号：高斯信号的高阶统计量为0。

⑤ 探明信号的空间特征：相位信息与空间信息密切相关（是否可以损伤定位？）。

高阶统计量的研究属于学科前沿，理论都还不成熟，更谈不上应用。

总结——现代信号分析学科的既有框架与未来

框架	说明	研究现状
随机信号与系统基本理论	使用二阶统计量描述随机信号	
信号空间与KL变换	从数学上定义现代信号处理问题的范畴	
参数估计理论	随机信号参数的最优估计	成熟
最佳滤波与自适应滤波	最优估计得到最优信号模型，完成最佳滤波	
现代谱估计	在频域分析中引入估计理论	
高阶谱估计	引入高阶统计量，更精准地刻画随机信号	
时频分析（小波分析、HHT）		
主分量分析		学科前沿
统计学习（机器学习、大数据）	*现代信号分析II的内容，尚未学习*	
神经网络，强非线性深度学习		
………		

现代信号分析与桥梁健康监测

2018.2.3 关于信号与SHM的思考

SHM根本任务：损伤识别与定位

SHM基本方法：基于振动的方法（还有其他的吗？）

基于振动方法的流程：

沿此流程 计算机与信号处理作用递减 工程师与土木工程作用递增

数据获取 $\xrightarrow{\text{振动信号}}$ 数据处理 $\xrightarrow{\text{特征指标}}$ 数据解读 $\xrightarrow{\text{结构状态}}$ 管养决策

数据获取 ↓ 软硬件 ×（与结构工程无关 非我所长）

数据处理 ↓ 狭义信号处理 ✓

数据解读 ↓ 分类判断 ✓

狭义信号处理 + 分类判断 → 广义信号处理 ✓

☆ 与土木工程紧密结合的交叉学科

管养决策 ↓ 工程知识 ✓×（相当成熟 基本掌握）

与SHM相关的狭义信号处理的前沿：

- 高阶谱估计 → 解决非高斯噪声、非线性、非最小相位问题
- 参数化方法 → 解决低信噪比，提高精度与分辨率
- 时频分析 → 解决非平稳问题
- 统计学习（理论）→ 探求信号的结构

↓ 一脉相承

数据解读、分类与判断的前沿：机器学习（应用），深度学习，$\boxed{\text{人工智能}}$

SHM痛点：

- 信噪比相对低（相对于机械）
- 非线性（损伤）
- 时变（性能退化）非平稳
- 冗余信息多，探伤如同"大海捞针"

这些痛点不是只靠传感器发展就能解决的！

结论：最新的信号处理技术有很多在SHM上应用的可能！

敬请指正